

Some moment polytopes for multiplicity-free quasi-Hamiltonian manifolds

Einige Impulspolytope für multiplizitätenfreie quasi-Hamiltonische
Mannigfaltigkeiten

Kay Paulus

Department Mathematik, FAU Erlangen-Nürnberg

22.02.2018

Zusammenfassung

In diesem Vortrag besprechen wir wesentliche Schritte zur Klassifikation von multiplizitätenfreien quasi-Hamiltonischen Mannigfaltigkeiten von Rang 1 einerseits und andererseits mit surjektiver Impulsabbildung. Das liefert insbesondere einen neuen Fundus an Beispielen.

1 Einführung

2 Impulspolytope von Rang eins

3 Surjektive Impulsabbildungen

- K ist eine einfache, einfach zusammenhängende Lie-Gruppe mit Lie-Algebra \mathfrak{k} und Komplexifizierung G
- $T_{\mathbb{R}}$ ist ein maximaler Torus von K mit Komplexifizierung T
- Sei Λ das Gewichtegitter von K ; dies ist die Charaktergruppe von T , die wir mit der Charaktergruppe der Borel-Untergruppe B identifizieren.
- Die Menge der einfachen Wurzeln von G (für einen gewählten Torus) bezeichnen wir mit S .

Grundlegende Invarianten sphärischer Varietäten

Eine normale, irreduzible G -Varietät Z heißt sphärisch, wenn die Borel-Untergruppe einen Zariski-offenen Orbit hat. Die wichtigsten Invarianten sind:

- Das **Gewichtsmonoid** kann mit einem Untermonoid des Gewichtegitters identifiziert werden.
- Die Menge der **sphärischen Wurzeln** $\Sigma(Z)$ von Z ist die kleinste Menge primitiver Elemente von $\Lambda(Z)$ mit der Eigenschaft

$$\mathcal{V}(Z) = \{\eta \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda(Z), \mathbb{Q}) \mid \langle \eta, \sigma \rangle \leq 0 \forall \sigma \in \Sigma(Z)\}$$

wobei $\mathcal{V}(Z)$ der sogenannte **Bewertungskegel** ist.

Sphärische Wurzeln glatter affiner sphärischer Varietäten (1)

Sphärische Wurzel

Luna-Diagramm

α_1



$2\alpha_1$



$[1/2]\alpha + \alpha'$



$\alpha_1 + \dots + \alpha_r$



$[1/2]\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$

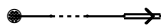


Sphärische Wurzeln glatter affiner sphärischer Varietäten (2)

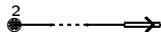
Sphärische Wurzel

Luna-Diagramm

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_r$$



$$2\alpha_1 + \cdots + 2\alpha_r$$



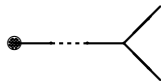
$$[1/2]\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3$$



$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_{n-1} + \alpha_n$$



$$[1/2]2\alpha_1 + \cdots + 2\alpha_{r-2} + \alpha_{r-1} + \alpha_r$$



Sphärische Wurzeln glatter affiner sphärischer Varietäten (3)

Sphärische Wurzel

Luna-Diagramm

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4$$



$$2\alpha_1 + \alpha_2$$



$$4\alpha_1 + 2\alpha_2$$



Warum interessiere ich mich für sphärische Varietäten?

Glatte affine sphärische Varietäten sind lokale Modelle für multiplizitätenfreie (quasi-) Hamiltonische Mannigfaltigkeiten.

Definition

Eine quasi-Hamiltonische K -Mannigfaltigkeit ist eine glatte Mannigfaltigkeit M mit einer K -Operation durch getwistete Konjugation $x \mapsto kx\tau(k^{-1})$, eine 2-Form w und eine glatte Abbildung $m : M \rightarrow K$, die **Impulsabbildung** mit bestimmten natürlichen Kompatibilitätsbedingungen.

Eine multiplizitätenfreie quasi-Hamiltonische Mannigfaltigkeit ist durch

- das Bild der Impulsabbildung, das **Momentpolytop** \mathcal{P} und
- die **generische Standgruppe** L

eindeutig bestimmt [Knop 2016].

Die Impulsabbildung

Zu einer Impulsabbildung $m : M \rightarrow K$ führt man die invariante Impulsabbildung $m_+ : M \rightarrow \bar{\mathcal{A}}$ ein, die folgendes Diagramm kommutieren lässt:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{m} & K \\ m_+ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{\mathcal{A}} & \xrightarrow{\text{bij}} & K/\tau K \end{array}$$

Hierbei bezeichnet $\bar{\mathcal{A}}$ die Alkove eines affinen Wurzelsystems.

Die generische Standgruppe

Fakt:

Die generische Standgruppe L_S ist durch eine Untergruppe Λ_S des Gewichtegitters Λ von K bestimmt.

Sphärische Paare

Man nennt (\mathcal{P}, Λ_S) **sphärisch in**
 $a \in \mathcal{P}$ wenn:

- \mathcal{P} ist polyhedral in a , das heißt

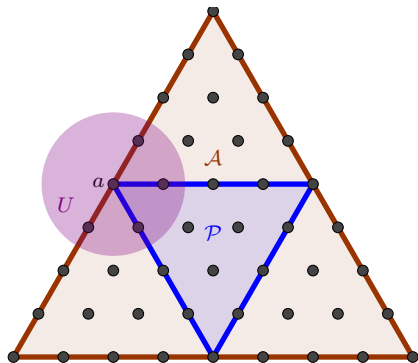
$$\mathcal{P} \cap U = (a + C_a \mathcal{P}) \cap U$$

in einer Umgebung U von
 $a \in \mathcal{A}$.

- Es gibt eine glatte affine
sphärische $K(a)_{\mathbb{C}}$ -Varietät Z
mit Gewichtsmonoid Γ_Z und

$$C_a \mathcal{P} \cap \Lambda_S = \Gamma_Z$$

Das Paar (\mathcal{P}, Λ_S) heißt **sphärisches
Paar**, wenn es in jedem Punkt a
sphärisch ist.



Knop 2016

Sphärische Paare und multiplizitätenfreie quasi-Hamiltonische Mannigfaltigkeiten stehen in Bijektion.

Impulspolytope von Rang eins

Wir suchen Tripel (X_1, X_2, ω) mit folgenden Eigenschaften:

- Das Impulspolytop $\mathcal{P} = [X_1 X_2]$ berührt jede Wand der Alkove.
- Das Monoid $\mathbb{N}\omega$ ist das Gewichtsmonoid einer glatten affinen sphärischen $K_{X_1}^{\mathbb{C}}$ -Varietät und $-\mathbb{N}\omega$ ist ein solches für eine glatte affine sphärische $K_{X_2}^{\mathbb{C}}$ -Varietät.

Lemma

Eine glatte affine sphärische Varietät $G \times^H V$ von Rang eins ist von genau einem der folgenden Typen

- $Z = G/H, V = 0$, also **homogene** Varietäten, entsprechen den sphärischen Wurzeln.
- $Z = V = \mathbb{C}^n, H = G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ oder $V = \mathbb{C}^{2n}, H = G = \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$, wir nennen diese **inhomogene** Varietäten.

Die inhomogenen Varietäten

Die Gewichte der inhomogenen Varietäten sind

- Für Typ A

$$\underline{1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad 0}$$

Mit Diagramm



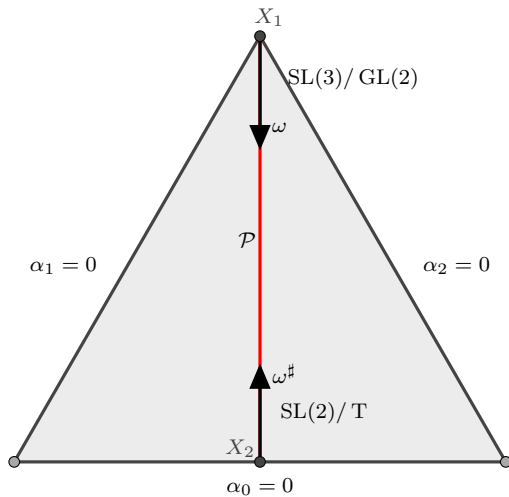
- Für Typ C :

$$\underline{1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad \overline{0} \quad 0}$$

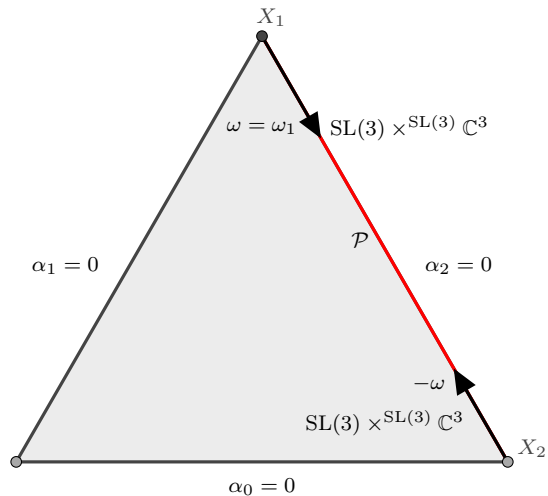
Mit Diagramm



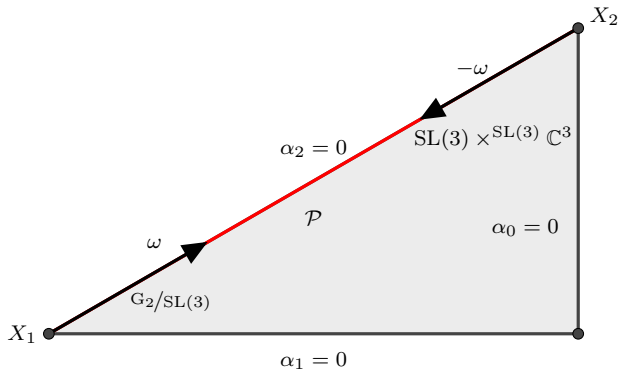
Bi-homogenes Polytop für $A_2^{(1)}$



Bi-inhomogenes Polytop für $A_2^{(1)}$



Gemischtes Polytop für $G_2^{(1)}$



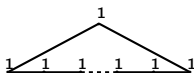
- Für bi-homogene Impulspolytope enthält $S(X_1)$ und $S(X_2)$ mindestens $n - 1$ einfache Wurzeln.
- Bi-inhomogene Polytope haben $S(X_1) = S \setminus \{\alpha_j\}$ mit $\langle \omega, \bar{\alpha}_k^\vee \rangle = 1$ und $S(X_2) := S \setminus \{\alpha_k\}$ mit $\langle -\omega, \bar{\alpha}_j^\vee \rangle = 1$.
- Gemischte Fälle (homogen in X_1 , inhomogen in X_2) erfüllen $|S(X_1)| = n$.

Fallunterscheidung für $A_1^{(1)}$



$S(X_1)$	ω	$S(X_2)$	$\omega^\#$ hom.?	$-\omega$ inhom.?
α_1	I_1	α_0		$-\omega = I_0 \Rightarrow \mathbf{A5}$
α_1	$\bar{\alpha}_1$	α_0	$\omega^\# = \alpha_0 \Rightarrow \mathbf{A4}$	
α_1	$2\bar{\alpha}_1$	α_0	$\omega^\# = 2\bar{\alpha}_0 \Rightarrow \mathbf{A1}$	

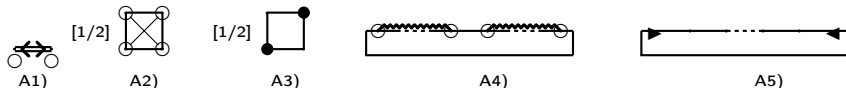
Fallunterscheidung für $A_n^{(1)}$



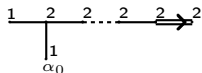
$S(X_1)$	ω	$S(X_2)$	ω^\sharp hom.?	$-w$ inhom.?
$S \setminus \{\alpha_0\}$	$\bar{\alpha}_{1,n}$	$S \setminus \{\alpha_1, \alpha_n\}$	$\omega^\sharp = \bar{\alpha}_0 \Rightarrow \mathbf{A4}$	
	I_1	$S \setminus \{\alpha_1\}$		$-\omega = I_0 \Rightarrow \mathbf{A5}$
$S \setminus \{\alpha_0\},$ $n = 3$	$[\frac{1}{2}](\bar{\alpha}_1 + 2\bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_3)$	$S \setminus \{\alpha_2\}$	$\omega^\sharp = [\frac{1}{2}]\bar{\alpha}_3 + 2\bar{\alpha}_0 + \bar{\alpha}_1 \Rightarrow \mathbf{A3}$	
$S \setminus \{\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_n\}$	$2\bar{\alpha}_0$	$S \setminus \{\alpha_0\}$	nein: $\omega^\sharp = 2\alpha_{1,n}$	nein: $\langle -\omega, \bar{\alpha}_1^\vee \rangle = \langle -\omega, \bar{\alpha}_n^\vee \rangle > 0$
$S \setminus \{\alpha_d, \alpha_e\};$ $d \leq e$	$\bar{\alpha}_{d+1, e-1}$	$S \setminus \{\alpha_{d+1}, \alpha_{e-1}\}$	$\omega^\sharp = \alpha_{e,d} \Rightarrow \mathbf{A4}$	
$S \setminus \{\alpha_0, \alpha_4\},$ $n \geq 4$	$[\frac{1}{2}]\bar{\alpha}_1 + 2\bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_3$	$S \setminus \{\alpha_2\}$	nein: $\omega^\sharp = [\frac{1}{2}]2\bar{\alpha}_0 + \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_3 + 2\bar{\alpha}_4 + \dots + 2\bar{\alpha}_n$	nein: $\langle -\omega, \alpha_3^\vee \rangle = 0,$ $\langle -\omega, \bar{\alpha}_4^\vee \rangle = [\frac{1}{2}]1$
$S \setminus \{\alpha_1, \alpha_3\}, n = 3$	$[\frac{1}{2}](\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_3)$	α_2, α_0	$\omega^\sharp = [\frac{1}{2}](\bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_0) \Rightarrow \mathbf{A2}$	
$S \setminus \{\alpha_1, \alpha_3\}, n > 3$	$[\frac{1}{2}](\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_3)$	$S \setminus \{\alpha_1, \alpha_3\}$	nein: $\omega^\sharp = [\frac{1}{2}](\bar{\alpha}_0 + \bar{\alpha}_{2,n})$	nein: $\langle -\omega, \bar{\alpha}_2^\vee \rangle > 0, \langle -\omega, \bar{\alpha}_3^\vee \rangle > 0$

Quasi-Hamiltonische für $A_n^{(1)}$

	ω	$\omega^\#$
A1)	$2\bar{\alpha}_0 \in H(1)$ $X_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$2\bar{\alpha}_1 \in H(0)$ $X_1 = (0, 0)$
A2)	$[\frac{1}{2}](\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_3) \in H(0, 2)$ $X_1 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$	$[\frac{1}{2}](\bar{\alpha}_0 + \bar{\alpha}_2) \in H(1, 3)$ $X_2 = (1/2, 0, 0 - 1/2)$
A3)	$[2]\frac{1}{2}(\bar{\alpha}_1 + 2\bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_3) \in H(0)$ $X_1 = (0, 0, 0, 0)$	$[2]\frac{1}{2}(\bar{\alpha}_3 + 2\bar{\alpha}_0 + \bar{\alpha}_1) \in H(2)$ $X_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
A4)	$\bar{\alpha}_1 + \dots + \bar{\alpha}_{d-1} \in H(0, d)$ $X_1 = (a, \dots, a, b, \dots, b)$ $a = \frac{n+1-d}{2n+2}, b = \frac{-d}{2n+2}$	$\bar{\alpha}_d + \dots + \bar{\alpha}_n + \bar{\alpha}_0$ $\in H(d-1, 1)$ $X_2 = (a, b, \dots, b, c, \dots, c)$ $a = \frac{2n+2-d}{2n+2}, b = \frac{n+1-d}{2n+2}, c = \frac{-d}{2n+2}$
A5)	$\omega = I_0(1)$ $X_1 = (\frac{n}{n+1}, -\frac{1}{n+1}, \dots, -\frac{1}{n+1})$	$-\omega = I_1(0)$ $X_2 = (0, \dots, 0)$



Fallunterscheidung für $B_n^{(1)}$



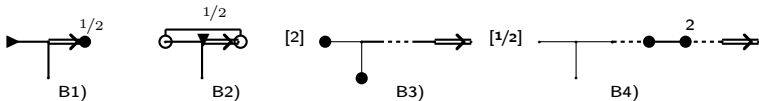
$S(X_1)$	ω	$S(X_2)$	ω^\sharp hom.?	$-\omega$ inhom.?
$S \setminus \{\alpha_0\}$	$[2]\bar{\alpha}_{1,n}$	$S \setminus \{\alpha_1\}$	$\omega^\sharp = [2]\bar{\alpha}_0 + \bar{\alpha}_{2,n}$ \Rightarrow B3	
$n = 3$	$\frac{1}{2}(\bar{\alpha}_1 + 2\bar{\alpha}_2 + 3\bar{\alpha}_3)$	$S \setminus \{\alpha_3\}$		$-\omega = I_0 \Rightarrow$ B1
$n = 3$	$\bar{\alpha}_1 + 2\bar{\alpha}_2 + 3\bar{\alpha}_3$	$S \setminus \{\alpha_3\}$	Nein: $\omega^\sharp = \frac{3}{2}\bar{\alpha}_0 + \frac{1}{2}\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2$	Nein: $\langle -\omega, \bar{\alpha}_0^\vee \rangle = 2$
$S \setminus \{\alpha_0, \alpha_1\}$	$[2]\bar{\alpha}_{2,n}$	$S \setminus \{\alpha_2\}$	$\omega^\sharp = [2]\frac{1}{2}(\bar{\alpha}_0 + \bar{\alpha}_1) \Rightarrow$ B4	
$S \setminus \{\alpha_0, \alpha_1\}$ für $n = 4$	$[\frac{1}{2}]\bar{\alpha}_2 + 2\bar{\alpha}_3 + 3\bar{\alpha}_4$	$S \setminus \{\alpha_n\}$	Nein: $\omega^\sharp = [\frac{1}{2}](\frac{3}{2}\bar{\alpha}_0 + \frac{3}{2}\bar{\alpha}_1 + 2\bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_3)$	Nein: Typ <i>D</i>
$S \setminus \{\alpha_0, \alpha_2\}$	$\omega \in C(1)$	enthält nie α_0 und α_2		

$n = 3$	$[\frac{1}{2}]\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_3$	$S \setminus \{\alpha_1, \alpha_3\}$	Nein: $\omega^\# = [\frac{1}{2}]\bar{\alpha}_0 + 2\bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_3$	Nein: $\langle -\omega, \bar{\alpha}_2^\vee \rangle = 2$
$S \setminus \{\alpha_0, \alpha_d\}, 2 < d < n$	$\omega \in C(2)$	$S \setminus \{\alpha_1, \alpha_{d-1}\}$	Nein: $\omega^\# = 2\bar{\alpha}_0 + \bar{\alpha}_{2,d-1} + 2\bar{\alpha}_{d,n}$	
	$\omega \in C(n)$	$\alpha_0 \notin S(X_2)$		
$S \setminus \{\alpha_0, \alpha_n\}$	$\omega \in C(2)$	Enthält nie α_0 und α_n		
$S \setminus \{\alpha_{d+1}\}, 1 \leq d+1 \leq n-1$	$[\frac{1}{2}]\bar{\alpha}_0 + \bar{\alpha}_1 + 2\bar{\alpha}_{2,d}$	$S \setminus \{\alpha_d\}$	$\omega^\# = [\frac{1}{2}]2\bar{\alpha}_{d+1,n} \Rightarrow \mathbf{B4}$	
$d = n - 3$	$[\frac{1}{2}]\bar{\alpha}_{n-2} + 2\bar{\alpha}_{n-1} + 3\bar{\alpha}_n$	$S \setminus \{\alpha_n\}$	Nein: $\omega^\# = [\frac{1}{2}]2\bar{\alpha}_0 + 2\bar{\alpha}_1 + 4\bar{\alpha}_{2,n-3} + 3\bar{\alpha}_{n-2} + 2\bar{\alpha}_{n1} + \bar{\alpha}_n$	Nein: Typ D
$S \setminus \{\alpha_2\}, n = 3$	$\frac{1}{2}\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_3$	$S \setminus \{\alpha_1, \alpha_3\}$		$-\omega = I_2 \Rightarrow \mathbf{B2}$
	$\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_3$	$S \setminus \{\alpha_1, \alpha_3\}$	Nein: $\omega^\# = \bar{\alpha}_0 + 2\bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_3$	Nein: $\langle -\omega, \bar{\alpha}_2^\vee \rangle = 2$
$d = 2$	$[2]\bar{\alpha}_0$	$S \setminus \{\alpha_0\}$	Nein: $\omega^\# = \bar{\alpha}_1 + 2\bar{\alpha}_{2,n}$	Nein: $\langle -\omega, \bar{\alpha}_2^\vee \rangle > 0,$
$S \setminus \{\alpha_d, \alpha_{d+1}\}$	$\omega \in C(0)$	$\alpha_{d+1} \notin S(X_2)$		
	$\omega \in C(n)$	$\bar{\alpha}_d \notin S(X_2)$		

$S \setminus \{\alpha_d, \alpha_e\}$ $e \neq d+1$	$\omega \in C(0)$	$\alpha_e \notin S(X_2)$		
	$\omega \in C(d+1)$		Nein	Nein
	$\omega \in C(n)$	$\alpha_d \notin S(X_2)$		
$S \setminus \{\alpha_d, \alpha_n\}$	$\omega \in C(0)$ oder $C(0) + C(1)$	$\alpha_n \notin S(X_1)$		
	$\omega \in C(d+1)$		Nein	Nein
$S \setminus \{\alpha_n\}$	$[\frac{1}{2}]\bar{\alpha}_0 + \bar{\alpha}_1 +$ $2\bar{\alpha}_{2,n-1}$	$S \setminus \{a_{n-1}\}$	$\omega^\sharp = [2]\bar{\alpha}_n \Rightarrow \mathbf{B4}$	
$n = 3$	$\bar{\alpha}_{0,2}$	$S \setminus \{\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_2\}$	Nein: $\omega^\sharp = \bar{\alpha}_2 +$ $2\bar{\alpha}_3$	Nein: $\langle -\omega, \bar{\alpha}_3^\vee \rangle =$ 2

Impulspolytope für $B_n^{(1)}$

	ω	$\omega^\#$
B1)	$\frac{1}{2}(\bar{\alpha}_0 + 2\bar{\alpha}_2 + 3\bar{\alpha}_3) \in H(1)$ $X_1 = (1, 1, 0)$	$-\omega \in I_1(\mathbf{3})$ $X_2 = (1/2, 1/2, 1/2)$
B2)	$\frac{1}{2}(\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_3) \in H(2)$ $X_1 = (1/2, 1/2, 0)$	$-\omega \in I_2(\mathbf{1}, \mathbf{3})$ $X_2 = (3/4, 1/4, 1/4)$
B3)	$[2](\bar{\alpha}_1 + \dots + \bar{\alpha}_n) \in H(0)$ $X_1 = (0, \dots, 0)$	$[2](\bar{\alpha}_0 + \bar{\alpha}_2 + \dots + \bar{\alpha}_n) \in H(1)$ $X_2 = (1, 0, \dots, 0)$
B4)	$[2](\frac{1}{2}(\bar{\alpha}_0 + \bar{\alpha}_1) + \bar{\alpha}_2 + \dots + \bar{\alpha}_d) \in H(d+1)$ $X_1 = (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0)$ <div style="text-align: center; margin-left: 100px;">$d+1$</div>	$[2](\bar{\alpha}_{d+1} + \dots + \bar{\alpha}_n) \in H(d)$ $X_2 = (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0)$ <div style="text-align: center; margin-left: 100px;">d</div>



Surjektive Impulsabbildungen

Surjektive Impulsabbildungen

- Die Impulsabbildung ist surjektiv genau dann, wenn das Impulspolytop die ganze Alkove ist.
- Die lokalen Modelle sind die glatten, affinen, sphärischen G -Varietäten mit G -saturiertem Gewichtsmonoid und vollem Rang.
- Ein Untermonoid Γ von Λ heißt G -saturiert, wenn

$$\mathbb{Z}\Gamma \cap \Lambda^+ = \Gamma$$

Pezzini und Van Steirteghems Algorithmus

- Pezzini und Van Steirteghem haben ein Kriterium gefunden, das nur mit Hilfe von kombinatorischen Daten aus der Standard-Theorie sphärischer Varietäten in endlich vielen Schritten zeigen kann, ob ein gegebenes Monoid glatt ist.
- In einem gemeinsamen Paper konnten wir zeigen, dass dieser Algorithmus auch benutzt werden kann, um bestimmte Familien von Monoiden zu klassifizieren.
- Insbesondere konnten wir eine vollständige Klassifikation der G -saturierten Gewichtsmonoide von vollem Rang geben.

Glatte saturierte Gewichtsmonoide von vollem Rang (1)

G	$\mathbb{Z}\Gamma$	$\Sigma^N(\Gamma)$
$SL(2)$	$\langle \omega_1 \rangle_{\mathbb{Z}}$	\emptyset
$SL(2)$	$\langle 2\omega_1 \rangle_{\mathbb{Z}}$	$\{2\alpha_1\}$
$SL(2)$	$\langle 4\omega_1 \rangle_{\mathbb{Z}}$	$\{2\alpha_1\}$
$SL(n+1)$	$2\langle \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, d\omega_n \rangle_{\mathbb{Z}}, d n+1$	$2S$
$n \geq 2,$ gerade	$\langle \alpha_1 + \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1} + \alpha_n \rangle_{\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}(k\omega_{n-1})$	S^+
$n \geq 2,$ ungerade	$\langle \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \dots, \alpha_{n-1} + \alpha_n,$ $e\omega_{n-1}, r\omega_{n-1} + \omega_n \rangle_{\mathbb{Z}}$ $e \frac{n+1}{2}; 0 \leq r \leq e-1$	S^+

mit $S^+ := \{\alpha + \beta : \alpha, \beta \in S, \alpha \neq \beta, \alpha \not\preceq \beta\}$

Glatte saturierte Gewichtsmoide von vollem Rang (2)

G	$\mathbb{Z}\Gamma$	$\Sigma^N(\Gamma)$
$\text{Spin}(2n+1), n \geq 2$	$2\mathbb{Z}S$	$2S$
$\text{Spin}(2n+1), n \geq 2$	2Λ	$2S$
$\text{Spin}(2n+1), n \geq 2$	$\mathbb{Z}(S^+ \cup \{2\alpha_n\})$	$S^+ \cup \{2\alpha_n\}$
$\text{Spin}(2n+1), n \geq 2$	$\Lambda^B := \langle \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}, 2\omega_n \rangle_{\mathbb{Z}}$	$S^+ \cup \{2\alpha_n\}$
$\text{Sp}(2n), n \geq 3$	$2\mathbb{Z}S$	$2S$
$\text{Sp}(2n), n \geq 3$	2Λ	$2S$
$\text{Sp}(2n), n \geq 2$	Λ	S^+
$\text{Spin}(2n), n \geq 4$	$2\mathbb{Z}S$	$2S$
$\text{Spin}(2n), n \geq 4$	2Λ	$2S$
$\text{Spin}(2n), n \geq 4$	$2\langle \alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}, \alpha_n, \omega_1 \rangle_{\mathbb{Z}}$	$2S$
$\text{Spin}(2n)$ $n \geq 4$ gerade	$2\langle \alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}, \alpha_n, \omega_n \rangle_{\mathbb{Z}}$	$2S$
$\text{Spin}(2n)$ $n \geq 4$ gerade	$2\langle \alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}, \alpha_n, \omega_1 + \omega_n \rangle_{\mathbb{Z}}$	$2S$

Glatte saturierte Gewichtsmonoide von vollem Rang (3)

G	$\mathbb{Z}\Gamma$	$\Sigma^N(\Gamma)$
E_6	$2\mathbb{Z}S$	$2S$
\overline{E}_6	2Λ	$2S$
E_7	$2\mathbb{Z}S$	$2S$
\overline{E}_7	2Λ	$2S$
E_8	$2\Lambda = 2\mathbb{Z}S$	$2S$
F_4	$2\Lambda = 2\mathbb{Z}S$	$2S$
G_2	$2\Lambda = 2\mathbb{Z}S$	$2S$

Vorgehensweise zur Klassifikation

- Beginne in einer Ecke der Alkove
- Wähle dort ein glattes Monoid und betrachte das davon erzeugte Gitter.
- Untersuche in jeder anderen Ecke von \mathcal{A} , ob das zugehörige Monoid glatt ist.
- Für Gitter zwischen $2\mathbb{Z}S$ und 2Λ ist das mit Hilfe der Relationen zwischen den Gewichten und den einfachen Wurzeln machbar.
- Für die anderen Fälle verwenden wir den Algorithmus von Pezzini und Van Steirteghem.

Theorem

Eine kompakte quasi-Hamiltonische K -Mannigfaltigkeit für eine einfache Lie-Gruppe K mit sphärischem Paar $(\bar{\mathcal{A}}, \mathbb{Z}\Gamma)$ existiert genau dann, wenn $\mathbb{Z}\Gamma$ in der folgenden Liste enthalten ist:

Wurzelsystem	Gitter
$A_n^{(1)}$	$2\langle \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, d\omega_n \rangle_{\mathbb{Z}}$ mit $d n+1$
$A_n^{(1)}$, n gerade	$\langle S^+ \oplus k\omega_{n-1} \rangle_{\mathbb{Z}}$ mit $k n+1$
n ungerade	$\langle \bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_3, \dots, \bar{\alpha}_{n-1} + \bar{\alpha}_n, e\omega_{n-1}, r\omega_{n-1} + \omega_n \rangle_{\mathbb{Z}}$, $e \frac{n+1}{2}, 0 \leq r \leq e-1$
$B_n^{(1)}$	$2\mathbb{Z}S_0$
	$2\Lambda_0$
$C_n^{(1)}$	$2\mathbb{Z}S_0$
	$2\Lambda_0$
	Λ_0

Wurzelsystem	Gitter
$D_n^{(1)}$	$2\mathbb{Z}S_0$
	$2\Lambda_0$
	$2\langle\alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}, \alpha_n, \omega_1\rangle\mathbb{Z}$
n gerade	$2\langle\alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}, \alpha_n, \omega_n\rangle\mathbb{Z}$
n ungerade	$2\langle\alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}, \alpha_n, \omega_1 + \omega_n\rangle\mathbb{Z}$
$E_6^{(1)}$	$2\mathbb{Z}S_0$
	$2\Lambda_0$
$E_7^{(1)}$	$2\mathbb{Z}S_0$
	$2\Lambda_0$
$E_8^{(1)}$	$2\Lambda_0$
$F_4^{(1)}$	$2\Lambda_0$
$G_2^{(1)}$	$2\Lambda_0$

Wurzelsystem	Gitter
$A_4^{(2)}$	$\langle 2\omega_1, \omega_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$
$A_{2n}^{(2)}$	$2\Lambda_0 = 2\mathbb{Z}S_n$
	Λ_0
$A_{2n-1}^{(2)}$	$2\mathbb{Z}S_0$
	$2\Lambda_0$
$D_{n+1}^{(2)}$	$2\mathbb{Z}S_0$
	$2\Lambda_0$
	$\Lambda_0^B = \langle \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}, 2\omega_n \rangle_{\mathbb{Z}}$
n ungerade	$\mathbb{Z}\Sigma_0 = \langle \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1} + \alpha_n, 2\alpha_n \rangle_{\mathbb{Z}}$
$E_6^{(2)}$	$2\Lambda_0$
$D_4^{(3)}$	$2\Lambda_0$

FRAGEN?