Exponentielles Wachstum – for Dummies

Dr. Kay Paulus

Agenda

- Crashkurs : Wachstum – was ist das eigentlich?
- Kurzer Ausflug in die Prozentrechnung
- Die Verdopplungszeit – for Dummies – Die 70er-Regel
- Die Verdopplungszeit – for Pros

Was ist exponentielles Wachstum?

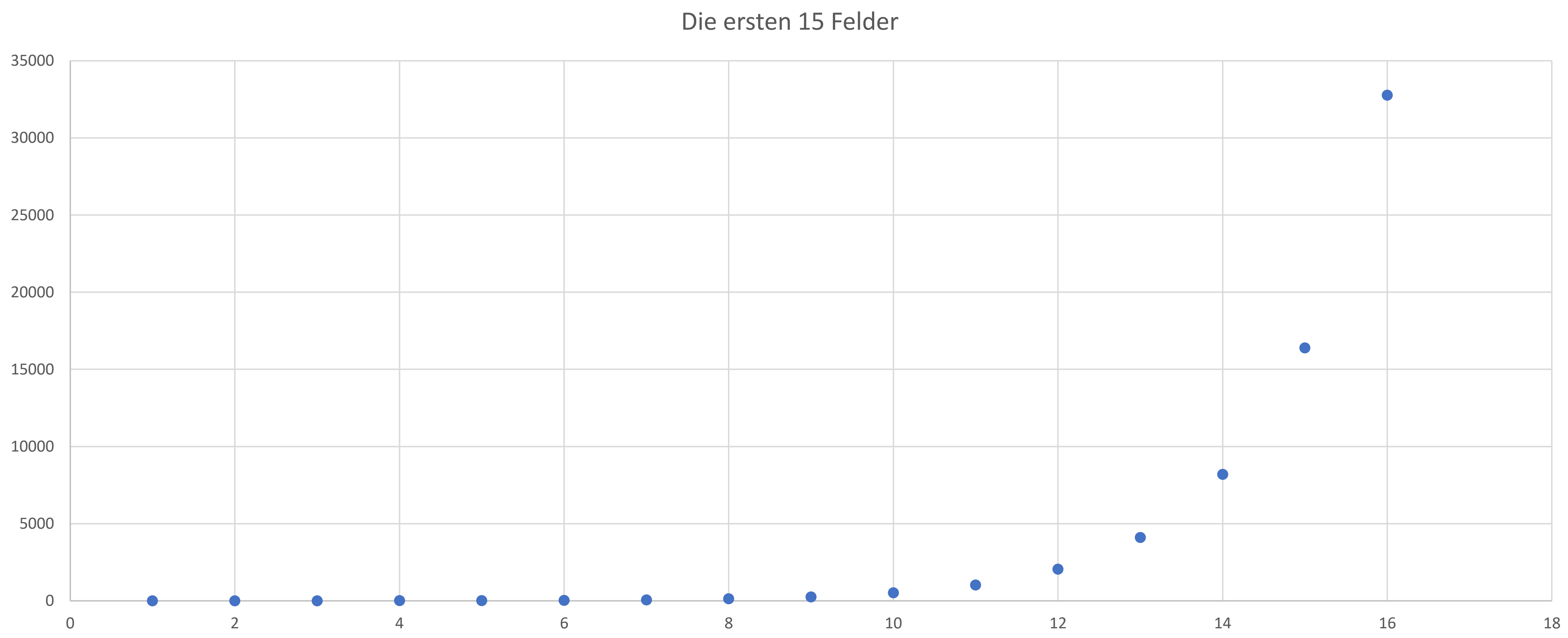
- Das Wachstum hängt vom Bestand ab. Beispiele:
  - Zinseszinz
  - Viren
  - Bevölkerung
  - ….
- Mathematische Beschreibung durch eine DGL:

$$\dot{N}(t) = C \cdot N(t)$$

- In Worten: „Das Wachstum des Bestandes $N(t)$, notiert durch $\dot{N}(t)$, ist eine Konstante Mal der Bestand

Das klassische Beispiel – Schach

- Dem Erfinder des Schachspiels soll für seine Erfindung versprochen worden sein, mit Getreide bezahlt zu werden. Für das erste Feld ein Korn, für das zweite Feld zwei, für das dritte vier, und so weiter.
- Auf dem 64. Feld würden dann 9 223 372 036 854 775 808 Weizenkörner liegen (9,2 Trillionen).
- Nach nur 63 Verdopplungen sind also aus einem Korn gigantisch viele Körner geworden
- Gleiches Spiel: Ein Virus nach 63 Verdopplungszeiträumen…


Die ersten 15 Felder
35000
30000
25000
20000
15000
10000
5000
0
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18

Der Wachstumsfaktor

- Wir suchen eine Größe, wie schnell die Zahl der Corona-Infizierten wächst
- Idee: Verhältnis von Größe nach einer gewissen Zeit zu einem Grundwert: Wachstumsfaktor b
- Wir berechnen $p = 1 - b$, dann erhalten wir einen Prozentsatz, um wie viel Prozent unsere Infiziertenzahl an einem Tag gewachsen ist.

Datum	Zahl der Infizierten	Wachstumsfaktor b (gerundet)	Wachstrumsrate p
24.02.2020	16		
25.02.2020	18	$= 18/16 = 1{,}125$	$0{,}125 = 12{,}5\%$
26.02.2020	21	$= 21/18 = 1{,}167$	$0{,}167 = 16{,}7\%$

Datum	Zahl der Infizierten	Wachstumsfaktor b (gerundet)	Wachstrumsrate p
24.02.2020	16		
25.02.2020	18	$= 18/16 \ = \ 1{,}125$	$0{,}125 \ = \ 12{,}5\%$
26.02.2020	21	$= 21/18 = \ 1{,}167$	$0{,}167 \ = \ 16{,}7\%$

- Die Zahl der Infizierten ist also vom 24.02.2020 zum 25.02.2020 um 12,5% gestiegen.
- Vom 25.02.2020 zum 26.02.2020 ist sie um 16,7% gestiegen.

Was sagt uns diese Zahl?

- Naiv: Wenn wir 12,5% Wachstum pro Tag haben, haben wir ja nach zwei Tagen 25%, nach 4 Tagen 50%, nach 8 Tagen 100% erreicht, also hat sich unser „Bestand“ nach 8 Tagen verdoppelt.
- NEIN! Denn wir vergessen dabei, dass die neu infizierten von Tag 2 schon wieder Leute anstecken können, bevor Tag 8 erreicht ist. (vgl. Zinseszinz). Das müssen wir berücksichtigen.

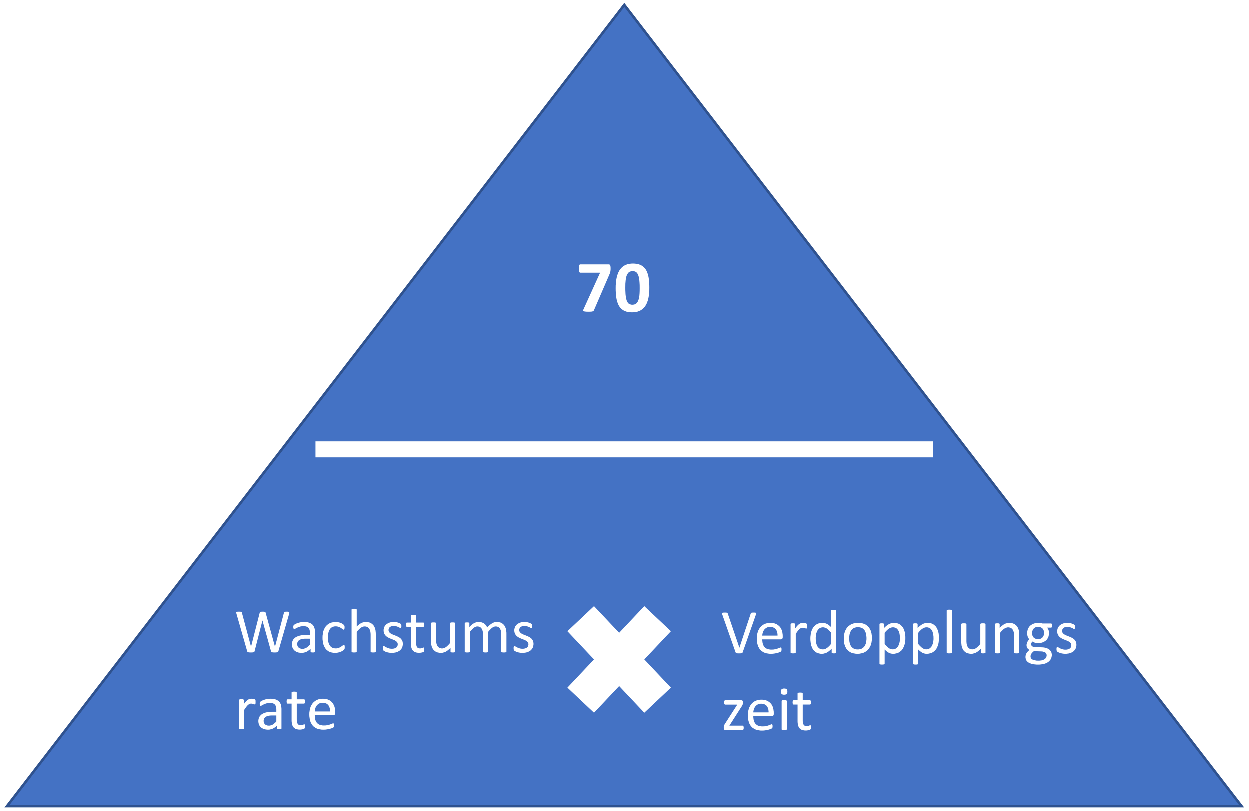
For Dummies – Die Regel der 70

- Einfache Faustregel zum Berechnen der Verdopplungszeit für kleine Wachstumsraten:

Wachstumsrate Mal Verdopplungszeit = 70

- Eine Wachstumsrate von 7% pro Tag entspricht also einer Verdopplungszeit von 10 Tagen.
- Wenn sich eine Größe in 5 Tagen verdoppelt, ist die Wachstumsrate 70 / 5 = 14%.

Trick für solche Formeln : Die Pyramide

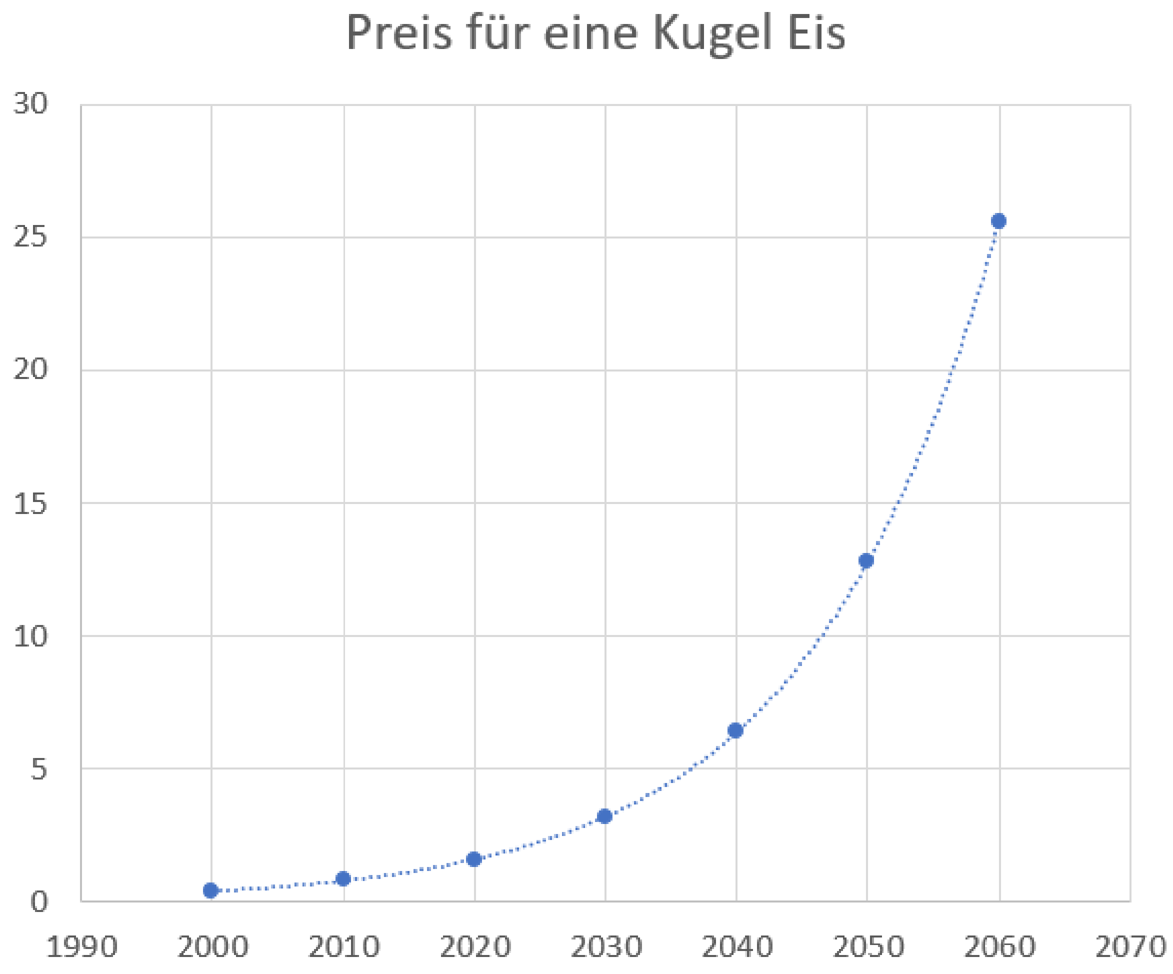


Tipp: Die Regel der 72

- Gerade im Finanzwesen wird auch gerne 72 statt 70 verwendet. Das ist zwar etwas ungenauer, dafür rechnet sich damit schöner, weil 72 viele kleine Teiler hat.

Beispiel – was kostet eine Kugel Eis wenn ich in Rente gehe?

- Zu meiner Jugendzeit, sagen wir 2000, kostete eine Kugel Eis im Freibad in Hersbruck 80 Pfennige
- Im Jahr 2010 kostete eine Kugel Eis bei einigen Eisdielen 80 Cent.
- 2020 verlagen manche Eisdielen für bestimmte Sorten durchaus schon ca. 1,50€.
- Das entspricht einer Preis-Verdopplung in 10 Jahren den 10 Jahren von 2000-2010
- Damit wuchs der Eispreis in dieser Zeit um ca. 7% im Jahr.
- 2010-2020 passt hier auch ungefähr



Für Pros – Wo kommt die 70 her?

- Lösung der DGL ist die Wachstumsgleichung
- $N(t) = N_0 \cdot b^t$ mit dem Wachstumsfaktor b pro Zeiteinheit und der Zeit t in der gleichen Zeiteinheit, also z.B. beides Jahre oder Tage.
- Wir wollen wissen, in welcher Zeit t sich unsere Größe N verdoppelt.
- $2N_0 = N_0\, b^t \Rightarrow 2 = b^t \Rightarrow \ln(2) = t \cdot \ln(b)$
- Es gilt $\ln(2) \approx 0{,}7$
- Für einen Wachstumsfaktor $b \approx 1$ gilt (Taylor) $\ln(b) = \ln(1+p)$ ≈p
- Damit $0{,}7 = t \cdot p$
- Schreiben wir p in % statt als Kommazahl, erhalten wir die Regel

70 = Verdopplungszeit Mal Wachstumsrate
$70 = t \cdot p[\%]$